

Záróvizsga
a matematika alapképzési (BSc) szakon
(2017 vagy későbbi kezdéssel)

A záróvizsgán a hallgató

1. megvédi szakdolgozatát,
 2. felel az alábbi tételsor kihúzott tétele alapján. A kihúzott tétel kapcsán a hallgató a tananyag további részeiből is kap kérdéseket.
- Mindkét részt érdemjeggyel értékeljük.

Záróvizsga tételsor

1. Polinomok

Polinomok, polinomgyűrűk. Test feletti polinomgyűrűk: prímfaktorizáció és Euklideszi osztás, legnagyobb közös osztó, rezultáns, diszkrimináns, többszörös gyökök. Irreducibilis polinomok \mathbb{Z} és \mathbb{Q} felett, a Schönemann-Eisenstein tétel. Irreducibilis polinomok \mathbb{R} és \mathbb{C} felett, az algebra alaptétele. Parciális törtekre bontás. Szimmetrikus polinomok.

2. Vektorterek

Vektortér, bázis, dimenzió, alterek. Direkt összeg. Lineáris leképezések, transzformációk, mátrixuk. Képtér, magtér. Sajátérték, sajátvektor, karakterisztikus polinom. Determináns, kifejtési tétel. A mátrixok algebraja, invertálhatóság, rang. Lineáris egyenletrendszerek, megoldhatóság, Cramer-szabály.

3. Euklideszi terek

Lineáris, bilineáris formák és kvadratikus alakok. Euklideszi és unitér tér fogalma, ortonormált bázis, altér ortogonális komplementuma. Formák előállítása belső szorzatként. Önadjungált, ortogonális, normális transzformációk. Főtengely-transzformáció.

4. Számelmélet

A számelmélet alaptétele. Lineáris kongruenciák és kongruenciarendszerek, a kínai maradéktétel, diofantikus egyenletek. Számelméleti függvények: additivitás és multiplikatívitas, nevezetes számelméleti függvények és explicit előállításuk, összegzési függvény és Möbius-transzformált. Prímszámok és tulajdonságaik, a prímszámok eloszlása. A geometriai számelmélet elemei, rácsok, a Minkowski-tétel és alkalmazásai.

5. Csoportelmélet

Csoport fogalma, példák. Részcsoportok, Lagrange-tétel. Ciklikus csoportok, rend. Csoportkonstrukciók: generált részcsoport és direkt szorzat. Véges Abel-csoportok alaptétele. Permutációcsoportok, Cayley-tétel. Orbit-stabilizátor tétel. Normálosztók, konjugálás, faktorcsoport. Sylow-tételei, p -csoportok. Nilpotens csoportok, feloldható csoportok.

6. Gyűrű- és testelmélet

Gyűrű fogalma, kommutativitás, egységelemesség, nullosztómentesség, példák. Részgyűrű, homomorfizmus, ideál, faktorgyűrű. Számelmélet gyűrűkben: egység, asszociált, irreducibilis

elem és prímelem, ezek kapcsolata. Euklideszi gyűrűk és főideálgűrűk. Hányadostest. Testbővítések. Algebrai elemek, minimálpolinom. Algebrai elemmel való egyszerű és többszörös bővítések, szorzástétel. Felbontási test, algebrai lezárt. Normális és szeparábilis bővítések. Galois-elmélet és alkalmazásai.

7. Kombinatorika, gráfelmélet

Alapvető leszámítási problémák: permutációk, variációk, kombinációk. Binomiális együtthatók tulajdonságai, binomiális és polinomiális tétel. Szitaformula és alkalmazásai. Gráfelméleti alapfogalmak. Gráfok Euler- és Hamilton-bejárása. Fagráfok, ekvivalens definíciók, fák csúcs- és élszáma, fokszámai, feszítőfák. Páros gráfok és jellemzési tételük. Síkbarajzolt és síkbarajzolható gráfok, Euler-formula, Kuratowski-tétel. Gráfok színezése: kromatikus szám, kromatikus polinom, kromatikus index.

8. Valós számsorozatok és függvények

Konvergencia fogalma és Cauchy-féle kritériuma. Konvergencia és műveletek, konvergencia és rendezés. A Bolzano-Weierstrass-tétel. Számsorok konvergenciája és abszolút konvergenciája. Konvergencia tesztek. Nevezetes sorozatok és sorok. Függvények határértéke és folytonossága. Függvénysorozatok és függvénysorok; pontonkénti és egyenletes konvergencia. Hatványsorok, elemi függvények.

9. Egyváltozós függvények differenciálszámítása

A differenciálhányados fogalma; deriválási szabályok. Középértéktételek, Taylor-tétel. Határfüggvény és összegfüggvény differenciálása. Teljes függvényvizsgálat.

10. Többváltozós függvények differenciálszámítása

Többváltozós függvények határértéke, folytonossága. Iránymenti, parciális és totális derivált. A derivált reprezentációja, differenciálási szabályok. Többszöri differenciálhatóság, a Schwarz-Young tétel. Taylor-tétel és szélsőértékszámítás.

11. Integrálszámítás

Primitív függvény; nevezetes primitív függvények. A Riemann-integrál bevezetése; az integrál tulajdonságai. Integrálhatósági kritériumok. A Newton–Leibniz formula. Az integrálfüggvény folytonossága, differenciálhatósága. Egyenletes konvergencia és a Riemann-integrál kapcsolata. Integrálás Jordan-mérhető halmazokon; Fubini-tétel és integráltranszformáció. A görbementi integrál.

12. Differenciálegyenletek

A Cauchy-feladat és a megoldás fogalma. A globális egzisztencia és unicitási tétel, Peano egzisztencia tétele. Változó és állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet rendszerek és n -ed rendű egyenletek. Az átviteli elv. Elemi módon megoldható egyenletek.

13. Mértékelmélet

Lebesgue-mérték. Mérhető függvények. A Lebesgue-integrál. A Riemann- és a Lebesgue-integrál kapcsolata. Fubini tétele.

14. Funkcionálanalízis (csak a matematikus specializáció hallgatói részére)

Metrikus terek, kompakt halmazok, szeparabilitás, Baire kategória tétele és következményei, Hahn–Banach-tétel és következményei, normált tér, Banach tér, Schauder bázis, $L(X,Y)$ és $B(X,Y)$ terek, nyílt leképezések tétele és következményei, zárt gráf tétel, egyenletes korlátosság tétele, Banach–Steinhaus-tételek.

15. A geometria alapjai

Az abszolút geometria axiomatikus felépítése és alapvető fogalmainak bevezetése. Nevezetes abszolút tételek: merőlegesség és párhuzamosság. Az euklideszi párhuzamossági axióma és ekvivalensei. A párhuzamos szelők tételei. Izometriák és hasonlóságok. Terület- és térfogatomérték az euklideszi síkon és térben.

16. Analitikus geometria

Az affin tér analitikus modellje. Affin transzformációk és a valós affin geometria alaptétele. Az euklideszi tér (kanonikus belső szorzat, norma, távolság és szög). Az ortogonális csoport. Vektoriális és vegyesszorzat. Egyenesek és síkok, másodrendű görbék és felületek.

17. Nemeuklideszi geometria *(csak a matematikus specializáció hallgatói részére)*

Affin és projektív síkok. Kettősviszony, a Papposz-Steiner tétel. Desargues és Papposz tételei. Kollineációk, centrális kollineációk. Kúpszeletek, Pascal tétele, pólus és poláris. A párhuzamossági axióma szerepe. A hiperbolikus síkgeometria egy tetszőlegesen választott modelljének ismertetése; az izometriák és a merőlegesség leírása a választott modellben.

18. Konvex geometria *(csak az alkalmazott matematikus specializáció hallgatói részére)*

Konvex halmazok, konvex burok, Caratheodory tétele, Helly tétele. Konvex poliéderek, Euler poliédertétele, szabályos poliéderek.

19. Konvex geometria *(csak a matematikus specializáció hallgatói részére)*

Konvex halmazok, konvex burok, Caratheodory tétele. Helly tétele és alkalmazásai. Elválasztási tételek. Támaszhipersíkok. A támaszhipersíkok egzisztenciátétele. Extremális pontok, a Krein-Milman-tétel. Poláris halmazok, konvex politópok és az előállítási tétel: csúcsok, lapok, élek. Konvex poliéderek, Euler tétele, szabályos poliéderek.

20. Görbék és felületek differenciálgeometriája

Differenciálható sík- és térgörbék. Görbület, torzió. A görbeelmélet alaptétele. Felületek az euklideszi térben. Mérés a felületen. Normálgörbület, főgörbületek, főirányok, szorzat- és átlaggörbület. Párhuzamos eltolás a felületen. Geodetikusok.

21. Vektoranalízis

Skalármezők, vektormezők. Görbementi integrál, felületi integrál. Gradiens, divergencia, rotáció. Integrálatalakító tételek: Stokes-tétel, Gauss--Ostrogradskij-tétel és fizikai jelentésük. Laplace operátor, harmonikus függvények.

22. Valószínűségszámítás

Kolmogorov-féle valószínűségi mező. Eloszlás, eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény. Függetlenség. Várható érték, szórás. Valószínűségi vektorváltozók. Nagy számok gyenge és erős törvényei. A centrális határeloszlás-tétel.

23. Statisztika

Statisztika. Statisztikai minta. Pontbecslések: torzítatlanság, konzisztencia. Becslési módszerek: momentum-módszer, maximum-likelihood becslés. Hipotézisvizsgálat. Regresszióanalízis, szórásanalízis.

24. Numerikus matematika *(csak az alkalmazott matematikus specializáció hallgatói részére)*

Függvények közelítése: interpoláció és legkisebb négyzetes közelítés. Közelítő integrálás. Lineáris és nemlineáris egyenletek és egyenletrendszerek iterációs megoldása.