Darstellung quasikonformer Abbildungen durch Fouriersche Reihen

Von REINER KÜHNAU (Halle/Saale)

In der z-Ebene ($z = x+iy$) sei ein durch $0<x<1$, $0<y<\mathfrak{h}$ definiertes Rechteck $\mathfrak{R}$ gegeben. Dieses werde durch eine schlichte quasikonforme Abbildung $w=w(z)$ auf ein durch $0<u<1$, $0<v<h$ definiertes Rechteck $\mathfrak{R}'$ der w-Ebene ($w = u+iv$) eckpunkttreu, d.h. mit $w(0)=0$, $w(1)=1$, $w(i\mathfrak{h})=ih$, $w(1+i\mathfrak{h}) = 1+ih$ abgebildet, wobei die Dilatation $p(z)\geqq 1$ die Ungleichung

$$p(z)\leqq Q \tag{1}$$

mit einer vorgegebenen Konstanten $Q>1$ erfüllt. Dann gilt — das war der Ausgangspunkt der Theorie der quasikonformen Abbildungen bei H. GRÖTZSCH in [3] — bekanntlich für des Funktional h

$$Q^{-1}\cdot\mathfrak{h} \leqq h \leqq Q\cdot\mathfrak{h}, \tag{2}$$

und durch Zurückführung auf diesen „Rechtecksfall" lassen sich nach [4], [11] allgemeinere Extremalprobleme bei quasikonformen Abbildungen mit einer Dilatationsbeschränkung der Form (1) erledigen.

Von O. TEICHMÜLLER wurde nun in [12, S. 15, Zeilen 16—20] (vgl. auch die offenbar ohne Kenntnis hiervon von L. I. WOLKOWYSKI in [14] gestellten Aufgaben) auf die allgemeineren Extremalprobleme hingewiesen, bei denen (1) durch die Dilatationsbeschränkung

$$p(z)\leqq p_0(z) \tag{3}$$

mit einer vorgegebenen (hier z. B. beschränkten, stückweise glatten) Ortsfunktion $p_0(z)$ ersetzt wird. Seit einiger Zeit sind hierzu für obigen Rechtecksfall entsprechende (2) verbessernde Abschätzungen für das Funktional h bekannt, z. B. (vgl. die in [6, § 5] genannte Literatur) die Ungleichung

$$\int_0^{\mathfrak{h}} \frac{dy}{\int_0^1 p_0\,dx} \leqq h \leqq 1\Bigg/\int_0^1 \frac{dx}{\int_0^{\mathfrak{h}} p_0\,dy}, \tag{4}$$

die jedoch i. allg. unscharf sind. Ungleichung (4) läßt sich auch weiter nach der

CAUCHY—SCHWARZschen Ungleichung zu der noch etwas unschärferen, jedoch bequemeren Ungleichung

$$p_0^{*-1} \cdot \mathfrak{h} \leqq h \leqq p_0^* \cdot \mathfrak{h} \tag{5}$$

umschreiben, wobei

$$p_0^* = \int_0^{\mathfrak{h}} \int_0^1 p_0 \, dx \, dy \Big/ \mathfrak{h} \tag{6}$$

der Mittelwert der Funktion p_0 ist.

Ziel vorliegender Arbeit ist entsprechend der genannten TEICHMÜLLERschen Fragestellung die zugehörige scharfe Abschätzung, die freilich wesentlich komplizierter ist. Die zugehörigen Extremalfunktionen wurden schon in [6] (vgl. auch [7], [8], [10] sowie die dort genannten Arbeiten von C. ANDREIAN CAZACU) geometrisch-funktionentheoretisch charakterisiert. Und zwar gibt es bei dem Extremalproblem $h=\min$ bzw. $h=\max$ bei der Dilatationsbeschränkung (3) jeweils genau eine Extremalfunktion. Diese erfüllt das elliptische System

$$u_x = p_0 \cdot v_y, \quad u_y = -p_0 \cdot v_x, \tag{7}$$

bzw.

$$u_x = p_0^{-1} \cdot v_y, \quad u_y = -p_0^{-1} \cdot v_x. \tag{8}$$

Die explizite, d.h. analytisch-rechnerische Gestalt der Extremalfunktionen und der genauen Schranken für das Funktional h ergibt sich nun aus folgendem Satz, zu dessen Herleitung wesentlich die Entwicklung der vorkommenden Funktionen in FOURIERsche Reihen benutzt wird (überhaupt scheinen die FOURIERschen Reihen bzw. Integrale ein sehr geeignetes Hilfsmittel bei vielen Fragen der Theorie der quasikonformen Abbildungen zu sein — vgl. die Zusatzbemerkungen am Schluss der Arbeit). Da die Extremalprobleme $h=\min$ und $h=\max$ bei einer Drehung um $\pi/2$ mit Hilfe von Ähnlichkeitstransformationen ineinander übergehen, können wir uns auf das Minimumproblem beschränken.

Satz. *Für jede der genannten eckpunkttreuen,* (3) *erfüllenden Abbildungen von* $\mathfrak{R}$ *gilt*

$$h \geqq \frac{4}{c_{00}} \left(\mathfrak{h} - \frac{\pi}{4} \cdot \sum_{\substack{\nu=0 \\ \mu=1}}^{\infty} \lambda_{\nu\mu} \cdot b_{\nu\mu} \cdot c_{\nu\mu} \cdot \mu \right) \equiv h^* \tag{9}$$

mit

$$c_{\nu\mu} = \frac{4}{\mathfrak{h}} \int_0^1 \int_0^{\mathfrak{h}} p_0(x, y) \cos \nu\pi x \cos \mu \frac{\pi}{\mathfrak{h}} y \, dx \, dy \tag{10}$$

und $\lambda_{00} = \dfrac{1}{4}$, $\lambda_{0\mu} = \lambda_{\nu 0} = \dfrac{1}{2}$, $\lambda_{\nu\mu} = 1$ *für* $\nu > 0$, $\mu > 0$, *und die Konstanten* $b_{\nu\mu}$ *erfüllen des unendliche lineare Gleichungssystem*

$$\sum_{\substack{\nu=0 \\ \mu=1}}^{\infty} C_{\nu\mu\gamma\delta} \cdot \lambda_{\nu\mu} b_{\nu\mu} + \frac{4}{\pi} \mathfrak{h} \delta c_{\gamma\delta} = 0 \qquad (\gamma = 0, 1, 2, \ldots, \delta = 1, 2, \ldots) \tag{11}$$

mit

$$C_{\nu\mu\gamma\delta} = \frac{1}{4}(c_{|\gamma-\nu|,|\delta-\mu|} + c_{\gamma+\nu,\delta+\mu})(\nu\gamma\mathfrak{h}^2 + \mu\delta)c_{00} - \tag{12}$$

$$-\frac{1}{4}(c_{|\gamma-\nu|,\delta+\mu} + c_{\gamma+\nu,|\delta-\mu|})(\nu\gamma\mathfrak{h}^2 - \mu\delta)c_{00} - \delta\cdot c_{\gamma\delta}\cdot c_{\nu\mu}\cdot\mu$$

$$(\gamma = 0, 1, 2, \ldots;\ \delta = 1, 2, \ldots;\ \nu = 0, 1, 2, \ldots;\ \mu = 1, 2, \ldots).$$

Das Gleichheitszeichen steht in (9) *genau dann, wenn die Abbildung*

$$u(x, y) = x + \sum_{\substack{\nu=1\\ \mu=0}}^{\infty} \lambda_{\nu\mu} a_{\nu\mu} \sin \nu\pi x \cos \mu\frac{\pi}{\mathfrak{h}} y, \tag{13}$$

$$v(x, y) = \frac{h^*}{\mathfrak{h}} y + \sum_{\substack{\nu=0\\ \mu=1}}^{\infty} \lambda_{\nu\mu} b_{\nu\mu} \cos \nu\pi x \sin \mu\frac{\pi}{\mathfrak{h}} y$$

vorliegt, wobei die $b_{\nu\mu}$ *die genannten Konstanten sind und*

$$a_{\gamma\delta} = \frac{1}{4\gamma\mathfrak{h}} \sum_{\substack{\nu=0\\ \mu=1}}^{\infty} \lambda_{\nu\mu} b_{\nu\mu}(c_{|\gamma-\nu|,|\delta-\mu|} + c_{|\gamma-\nu|,\delta+\mu} + c_{\gamma+\nu,|\delta-\mu|} + c_{\gamma+\nu,\delta+\mu})\mu + \frac{h^*}{\pi\gamma\mathfrak{h}} c_{\gamma\delta} \tag{14}$$

$$(\gamma = 1, 2, \ldots,\ \delta = 0, 1, 2, \ldots)$$

zu setzen ist.

Die Ortsfunktion p_0 sei dabei so beschaffen, daß p_0 sowie die partiellen Ableitungen der (7) erfüllenden Extremalfunktionen durch ihre FOURIERsche Reihen darstellbar sind, und daß die aus den FOURIERkoeffizienten dieser FOURIERschen Reihen gebildeten Reihen absolut konvergieren. Dann sind die FOURIERreihen für p_0 und diese partiellen Ableitungen und damit für u, v selbst absolut konvergent, und man kann die Summanden in diesen Reihen, wie dann auch in (9), (11) und (14) in beliebiger Reihenfolge anordnen.

BEWEIS. Ist $u(x, y)$, $v(x, y)$ die (7) erfüllende Extremalfunktion zur Aufgabe $h = \min$, wobei der sich einstellende (also kleinstmögliche) Wert des Funktionals h gleich h^* sei, so erweisen sich die nach Spiegelung an den Seiten des Rechtecks $\mathfrak{R}$ usw. in die ganze z-Ebene fortgesetzten Funktionen $p_0(x, y)$, $u(x, y) - x$, $v(x, y) - -\frac{h^*}{\mathfrak{h}}\cdot y$ als periodisch mit der Periode 2 in x und $2\mathfrak{h}$ in y und damit darstellbar durch

$$p_0(x, y) = \sum_{\substack{\nu=0\\ \mu=0}}^{\infty} \lambda_{\nu\mu} c_{\nu\mu} \cos \nu\pi x \cos \mu\frac{\pi}{\mathfrak{h}} y \tag{15}$$

mit den Koeffizienten (10) bzw. gemäß (13) mit zunächst unbestimmten Zahlenwerten $a_{\nu\mu}$, $b_{\nu\mu}$, h^*. Nach Voraussetzung konvergiert die aus (13) durch gliedweise Differentiation entstehende FOURIERreihe für v_y ebenso wie die für p_0 für alle x, y absolut, und man kann also die Summanden in beliebiger Reihenfolge umordnen, bei der Bildung von $p_0 v_y$ gliedweise multiplizieren und die Summanden der entstehenden, wieder absolut konvergierenden Reihe in beliebiger Reihenfolge anschreiben:

$$p_0 \cdot v_y = \sum_{\substack{\alpha,\beta,\nu=0\\ \mu=1}}^{\infty} \lambda_{\nu\mu} b_{\nu\mu} \lambda_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta}\, \mu \frac{\pi}{\mathfrak{h}} \cos \nu\pi x \cos \alpha\pi x \cos \mu \frac{\pi}{\mathfrak{h}} y \cos \beta \frac{\pi}{\mathfrak{h}} y +$$

$$+ \frac{h^*}{\mathfrak{h}} \sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} \lambda_{\nu\mu} c_{\nu\mu} \cos \nu\pi x \cos \mu \frac{\pi}{\mathfrak{h}} y =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{\substack{\alpha,\beta,\nu=0\\ \lambda=1}}^{\infty} \lambda_{\nu\mu} b_{\nu\mu} \lambda_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} \cdot \mu \frac{\pi}{\mathfrak{h}} \cdot \Big[\cos(\nu+\alpha)\pi x \cos(\mu+\beta) \frac{\pi}{\mathfrak{h}} y +$$

$$+ \cos(\nu+\alpha)\pi x \cos(\mu-\beta) \frac{\pi}{\mathfrak{h}} y + \cos(\nu-\alpha)\pi x \cos(\mu+\beta) \frac{\pi}{\mathfrak{h}} y +$$

$$+ \cos(\nu-\alpha)\pi x \cos(\mu-\beta) \frac{\pi}{\mathfrak{h}} y \Big] + \frac{h^*}{\mathfrak{h}} \sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} \lambda_{\nu\mu} c_{\nu\mu} \cos \nu\pi x \cos \mu \frac{\pi}{\mathfrak{h}} y =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{\substack{\gamma \geqq \nu \geqq 0\\ \delta \geqq \mu \geqq 1}} \lambda_{\nu\mu} b_{\nu\mu} \lambda_{\gamma-\nu,\delta-\mu} c_{\gamma-\nu,\delta-\mu}\, \mu \frac{\pi}{\mathfrak{h}} \cos \gamma\pi x \cos \delta \frac{\pi}{\mathfrak{h}} y +$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{\substack{\gamma \geqq \nu \geqq 0\\ \mu \geqq 1,\ \delta \leqq \mu}} \lambda_{\nu\mu} b_{\nu\mu} \lambda_{\gamma-\nu,\mu-\delta} c_{\gamma-\nu,\mu-\delta}\, \mu \frac{\pi}{\mathfrak{h}} \cos \gamma\pi x \cos \delta \frac{\pi}{\mathfrak{h}} y +$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{\substack{\nu \geqq 0,\ \gamma \leqq \nu\\ \delta \geqq \mu \geqq 1}} \lambda_{\nu\mu} b_{\nu\mu} \lambda_{\nu-\gamma,\delta-\mu} c_{\nu-\gamma,\delta-\mu}\, \mu \frac{\pi}{\mathfrak{h}} \cos \gamma\pi x \cos \delta \frac{\pi}{\mathfrak{h}} y +$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{\substack{\nu \geqq 0,\ \gamma \leqq \nu\\ \mu \geqq 1,\ \delta \leqq \mu}} \lambda_{\nu\mu} b_{\nu\mu} \lambda_{\nu-\gamma,\mu-\delta} c_{\nu-\gamma,\mu-\delta}\, \mu \frac{\pi}{\mathfrak{h}} \cos \gamma\pi x \cos \delta \frac{\pi}{\mathfrak{h}} y +$$

$$+ \frac{h^*}{\mathfrak{h}} \sum_{\gamma,\delta=0}^{\infty} \lambda_{\gamma\delta} c_{\gamma\delta} \cos \gamma\pi x \cos \delta \frac{\pi}{\mathfrak{h}} y.$$

Die letzte Umformung entsteht durch eine Indexverschiebung und benutzt die ja gesicherte Konvergenz der entstehenden fünf Einzelreihen. Schreibt man noch den entstehenden Ausdruck für $p_0 v_y$ explizit als FOURIERreihe um, so entsteht durch Koeffizientenvergleich mit der (ebenfalls durch gliedweise Differentiation aus (3) entstehenden) Reihe für u_x zunächst (14), außer für $\gamma=\delta=0$, in welchem Falle der in (9) für h^* gegebene Wert folgt und für $\gamma=0$, $\delta \geqq 1$, in welchem Falle formal auch (14) gilt, wenn man zuvor mit γ multipliziert. Durch eine entsprechende Prozedur bei $u_y = -p_0 \cdot v_x$ ergibt sich für $\gamma,\ \delta \geqq 1$

$$-4a_{\gamma\delta}\frac{\delta}{\mathfrak{h}} = \sum_{\substack{\gamma\geqq\nu\geqq 1\\ \delta\geqq\mu\geqq 1}} \lambda_{\nu\mu} b_{\nu\mu} \lambda_{\gamma-\nu,\delta-\mu} c_{\gamma-\nu,\delta-\mu}\cdot\nu + \sum_{\substack{\gamma\geqq\nu\geqq 1\\ \mu\geqq\delta}} \lambda_{\nu\mu} b_{\nu\mu} \lambda_{\gamma-\nu,\mu-\delta} c_{\gamma-\nu,\mu-\delta}\cdot\nu -$$

$$-\sum_{\substack{\gamma\geqq\nu\geqq 1\\ \mu\geqq 1}} \lambda_{\nu\mu} b_{\nu\mu} \lambda_{\gamma-\nu,\mu+\delta} c_{\gamma-\nu,\mu+\delta}\cdot\nu + \sum_{\substack{\delta\geqq\mu\geqq 1\\ \nu\geqq\gamma}} \lambda_{\nu\mu} b_{\nu\mu} \lambda_{\nu-\gamma,\delta-\mu} c_{\nu-\gamma,\delta-\mu}\cdot\nu -$$

$$-\sum_{\substack{\delta\geqq\mu\geqq 1\\ \nu\geqq 1}} \lambda_{\nu\mu} b_{\nu\mu} \lambda_{\nu+\gamma,\delta-\mu} c_{\nu+\gamma,\delta-\mu}\cdot\nu + \sum_{\substack{\mu\geqq\delta\\ \nu\geqq\gamma}} \lambda_{\nu\mu} b_{\nu\mu} \lambda_{\nu-\gamma,\mu-\delta} c_{\nu-\gamma,\mu-\delta}\cdot\nu -$$

$$-\sum_{\substack{\mu\geqq\delta\\ \nu\geqq 1}} \lambda_{\nu\mu} b_{\nu\mu} \lambda_{\nu+\gamma,\mu-\delta} c_{\nu+\gamma,\delta-\mu}\cdot\nu - \sum_{\substack{\nu\geqq\gamma\\ \mu\geqq 1}} \lambda_{\nu\mu} b_{\nu\mu} \lambda_{\nu-\gamma,\mu+\delta} c_{\nu-\gamma,\mu+\delta}\cdot\nu +$$

$$+\sum_{\substack{\mu\geqq 1\\ \nu\geqq 1}} \lambda_{\nu\mu} b_{\nu\mu} \lambda_{\nu+\gamma,\mu+\delta} c_{\nu+\gamma,\mu+\delta}\cdot\nu =$$

$$\sum_{\substack{\nu=1\\ \mu=1}}^{\infty} \lambda_{\nu\mu} b_{\nu\mu} (c_{|\gamma-\nu|,|\delta-\mu|} - c_{|\gamma-\nu|,\delta+\mu} - c_{\gamma+\nu,|\delta-\mu|} + c_{\gamma+\nu,\delta+\mu})\cdot\nu,$$

und durch Elimination von $a_{\gamma\delta}$ tatsächlich (11).

Zusatzbemerkungen. **1.** Setzt man

$$\lambda_{\nu\mu} C_{\gamma\mu\gamma\delta} = \begin{cases} \dfrac{1}{4}(\gamma^2\mathfrak{h}^2+\delta^2)c_{00}^2\cdot(1-C^*_{\gamma\delta\gamma\delta}) & \text{für} \quad \nu=\gamma,\ \mu=\delta, \\ -\dfrac{1}{4}(\gamma^2\mathfrak{h}^2+\delta^2)c_{00}^2\cdot C^*_{\nu\mu\gamma\delta} & \text{sonst,} \end{cases} \tag{16}$$

so läßt sich (11) auch in der Form

$$b_{\gamma\delta} = \sum_{\substack{\nu=0\\ \mu=1}}^{\infty} C^*_{\nu\mu\gamma\delta}\cdot b_{\nu\mu} - \frac{16}{\pi}\mathfrak{h}\cdot\frac{\delta}{\gamma^2\mathfrak{h}^2+\delta^2}\cdot\frac{c_{\gamma\delta}}{c_{00}^2} \tag{17}$$

schreiben. Betreffs effektiver Lösung des Systems (11) bzw. (17) sei auf [5] (S. 19. ff.) und dort genannte Literatur verwiesen.

2. Im folgenden soll eine Näherung für die Größe h^* angegeben werden, falls $p_0(x, y)$ von einer Konstanten wenig abweicht. Dazu setzen wir

$$p_0(z) = p_0^* + \varepsilon\cdot q_0(z), \tag{18}$$

wobei wie in (6) p_0^* der Mittelwert der Funktion $p_0(z)$ ist. Dann gilt bei fester Funktion $q_0(z)$ für $\varepsilon\to 0$ ersichtlich $C^*_{\nu\,\mu\gamma\delta} = O(\varepsilon)$ und damit wegen (17)

$$b_{\gamma\delta} = -\frac{16}{\pi}\mathfrak{h}\frac{\delta}{\gamma^2\mathfrak{h}^2+\delta^2}\cdot\frac{c_{\gamma\delta}}{c_{00}^2}\cdot(1+O(\varepsilon)),$$

mithin

$$h^* = \frac{4\mathfrak{h}}{c_{00}}\left[1 + 4\sum_{\substack{\gamma=0\\ \delta=1}}^{\infty} \lambda_{\gamma\delta}\frac{\delta^2}{\gamma^2\mathfrak{h}^2+\delta^2}\cdot\frac{c_{\gamma\delta}^2}{c_{00}^2} + O(\varepsilon^3)\right], \tag{19}$$

$$a_{\gamma\delta} = \frac{h^*}{\pi\gamma\mathfrak{h}}c_{\gamma\delta} - \frac{4}{\pi}\frac{\delta^2}{\gamma(\gamma^2\mathfrak{h}^2+\delta^2)}\lambda_{\gamma\delta}\frac{c_{\gamma\delta}}{c_{00}} + O(\varepsilon^2). \tag{20}$$

Für die in (19) entstehende Summe läßt sich leicht noch eine explizite Formel angeben, falls noch z. B. $\sum\delta^3|c_{\gamma\delta}|$ und $\sum\delta^2\gamma|c_{\gamma\delta}|$ konvergieren (so daß p_{0yy} stetig partiell differenzierbar ist). Dazu führen wir die Hilfsfunktion

$$\Phi(x,y) = \sum_{\substack{\gamma=0\\ \delta=1}}^{\infty} \lambda_{\gamma\delta}\frac{\delta^2}{\gamma^2\mathfrak{h}^2+\delta^2}c_{\gamma\delta}\cos\gamma\pi x\cos\delta\frac{\pi}{\mathfrak{h}}y$$

ein, für die offenbar

$$\Delta\Phi(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}p_0(x,y) \tag{21}$$

gilt. Durch Lösung dieser POISSONschen Differentialgleichung ergibt sich

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-\mathfrak{h}}^{\mathfrak{h}}\frac{\partial^2 p_0(\mathfrak{x},\mathfrak{y})}{\partial\mathfrak{y}^2}\cdot\log|\sigma(z-\mathfrak{z})|\,d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y} - C \tag{22}$$

mit

$$C = \frac{\eta'}{i\mathfrak{h}}\cdot\int_{-1}^{1}\int_{-\mathfrak{h}}^{\mathfrak{h}}[p_0(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) - p_0(\mathfrak{x},0)]\,d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y}. \tag{23}$$

Dabei ist σ die WEIERSTRASSsche Sigmafunktion zu den Perioden $2\omega=2$ und $2\omega'=2i\mathfrak{h}$, und es wird $z = x+iy$, $\mathfrak{z} = \mathfrak{x}+i\mathfrak{y}$ gesetzt. Die Funktion p_0 wird noch im ganzen Rechteck $-1\leqq x\leqq 1$, $-\mathfrak{h}\leqq y\leqq\mathfrak{h}$ symmetrisch fortgesetzt und $\eta=\zeta(\omega)$, $\eta'=\zeta(\omega')$ definiert (ζ = WEIERSTRASSsche Zetafunktion).

Zum Beweis von (22) zeigt man zunächst, daß die rechte Seite von (22) eine Lösung von (21) ist, indem man von $\sigma(z-\mathfrak{z})$ den Faktor $z-\mathfrak{z}$ abspaltet. Hernach zeigt man, daß die rechte Seite von (22) mit 2 und $2i\mathfrak{h}$ periodisch ist. Zum Beispiel ergibt sich die Periodizität mit 2 wegen $\log|\sigma(Z+2)| = \log|\sigma(Z)| + 2\eta\,\Re e(Z+1)$ aus

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\mathfrak{h}}^{\mathfrak{h}}\frac{\partial^2 p_0(\mathfrak{x},\mathfrak{y})}{\partial\mathfrak{y}^2}\,\Re e\,(z-\mathfrak{z}+\omega)\,d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y} = 0$$

(man führe zunächst die Integration nach $\mathfrak{y}$ aus). Bei der Periodizität mit $2i\mathfrak{h}$ wird nach partieller Integration benutzt, daß (wegen der Symmetrie) p_{0y} auf dem oberen und unteren Rande des Rechteckes verschwindet. Damit ist die Differenz beider Seiten von (22) eine doppeltperiodische harmonische Funktion, mithin eine Konstante und damit $\equiv 0$, weil in (22) beide Seiten das Mittel 0 besitzen im Periodenrechteck. Das ergibt sich daraus, daß schon das Mittel längs jeder im Rechteck gelegenen und zur imaginären Achse parallelen Strecke der Länge $2\mathfrak{h}$ für die rechte Seite von (22) (ebenso wie für die linke Seite — vgl. nämlich die Definition von Φ) gleich Null ist, was aus den folgenden Rechnungen fließt (in y und $\mathfrak{y}$ wird längs verschiedener solcher Strecken integriert, auf denen $\Re\, z = x = \text{const}$ bzw. $\Re\, \mathfrak{z} = \mathfrak{x} = \text{const}$ ist):

$$\int_{-\mathfrak{h}}^{\mathfrak{h}} \left(\int_{-\mathfrak{h}}^{\mathfrak{h}} \frac{\partial^2 p_0(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})}{\partial \mathfrak{y}^2} \log |\sigma(z-\mathfrak{z})|\, d\mathfrak{y} \right) dy = \int_{-\mathfrak{h}}^{\mathfrak{h}} \left(\int_{-\mathfrak{h}}^{\mathfrak{h}} \frac{\partial p_0(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})}{\partial \mathfrak{y}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}} \log |\sigma(z-\mathfrak{z})|\, d\mathfrak{y} \right) dy =$$

$$= - \int_{-\mathfrak{h}}^{\mathfrak{h}} \left(\int_{-\mathfrak{h}}^{\mathfrak{h}} \frac{\partial p_0(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})}{\partial \mathfrak{y}} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \log |\sigma(z-\mathfrak{z})|\, d\mathfrak{y} \right) dy =$$

$$= - \int_{-\mathfrak{h}}^{\mathfrak{h}} \frac{\partial p_0(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})}{\partial \mathfrak{y}} \log \left| \frac{\sigma(x + 2i\mathfrak{h} - \mathfrak{z})}{\sigma(x-\mathfrak{z})} \right| d\mathfrak{y} =$$

$$= - \int_{-\mathfrak{h}}^{\mathfrak{h}} \frac{\partial p_0(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})}{\partial \mathfrak{y}} (2\eta' \omega' - 2\eta' i \mathfrak{y})\, d\mathfrak{y} = 2i\eta' \int_{-\mathfrak{h}}^{\mathfrak{h}} \mathfrak{y} \frac{\partial p_0(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})}{\partial \mathfrak{y}}\, d\mathfrak{y} =$$

$$= 2i\eta' \left[2\mathfrak{h} p_0(\mathfrak{x}, 0) - \int_{-\mathfrak{h}}^{\mathfrak{h}} p_0(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, d\mathfrak{y} \right].$$

Mit Hilfe dieser Funktion Φ ergibt sich nun aus (19) endgültig

$$h^* = \frac{\mathfrak{h}}{p_0^*} \left[1 + \frac{1}{\mathfrak{h} p_0^{*2}} \int_0^1 \int_0^{\mathfrak{h}} p_0(x, y) \cdot \Phi(x, y)\, dx\, dy + O(\varepsilon^3) \right]. \tag{24}$$

Diese Formel läßt sich unter schwächeren Voraussetzungen auch nach der Methode wie z. B. in [1] herleiten.

3. Es soll noch die gefundene Abschätzung (9) mit der linken Hälfte der Abschätzung (4) bei einem gemäß (18) gebildeten $p_0(x, y)$ für $\varepsilon \to 0$ verglichen werden. Dazu berechnet man

$$h^{**} = \int_0^{\mathfrak{h}} \frac{dy}{\int_0^1 p_0\, dx} = \frac{1}{p_0^*} \int_0^{\mathfrak{h}} \frac{dy}{1 + \frac{\varepsilon}{p_0^*} \int_0^1 q_0\, dx} =$$

$$= \frac{1}{p_0^*} \int_0^{\mathfrak{h}} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon}{p_0^*} \int_0^1 q_0\, dx + \frac{\varepsilon^2}{p_0^{*2}} \left(\int_0^1 q_0\, dx \right)^2 + O(\varepsilon^3) \right\} dy,$$

somit

$$h^{**}=\frac{\mathfrak{h}}{p_0^*}\left[1+\frac{1}{\mathfrak{h}p_0^{*2}}\int\limits_0^{\mathfrak{h}}\left(\int\limits_0^1(p_0-p_0^*)\,dx\right)^2dy+O(\varepsilon^3)\right]. \tag{25}$$

Um nun zu erkennen, daß h^{**} i. allg. sogar asymptotisch für $\varepsilon\to 0$ wirklich kleiner ist als der in (24) gefundene (exakte) Wert h^*, setzt man für $p_0-p_0^*$ die zugehörige FOURIERreihe ein und erhält

$$h^{**}=\frac{\mathfrak{h}}{p_0^*}\left[1+\frac{1}{\mathfrak{h}p_0^{*2}}\int\limits_0^{\mathfrak{h}}\left(\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{\infty}c_{0\mu}\cos\mu\frac{\pi}{\mathfrak{h}}y\right)^2dy+O(\varepsilon^3)\right],$$

$$h^{**}=\frac{4\mathfrak{h}}{c_{00}}\left[1+2\sum_{\delta=1}^{\infty}\frac{c_{0\delta}^2}{c_{00}^2}+O(\varepsilon^3)\right], \tag{26}$$

woraus im Vergleich mit (19) die Behauptung folgt — in der entstandenen Summe fehlen i. allg. gegenüber der entsprechenden Summe in (19) gewisse Summanden.

4. Im Zusammenhang mit der Frage, unter allen eine Dilatationsbeschränkung der Form (3) erfüllenden schlichten Abbildungen einer fest vorgegebenen Torusfläche auf eine andere Torusfläche den genauen Wertebereich des konformen Moduls des Bildtorus zu bestimmen, entsteht folgende

Aufgabe. Gegeben seien die komplexen Zahlen $2\omega=1$ und $2\omega'$ mit $\Im\mathfrak{m}\,\omega'>0$ und eine Funktion $p_0(x,y)=p_0(z)\geqq 1$ mit den Perioden 2ω und $2\omega'$. Gesucht ist diejenige stetige schlichte Abbildung der Vollebene, die — als komplexe Funktion $w=w(z)$ geschrieben — für alle z die Relation $w(z+1)=w(z)+1$, $w(z+2\omega')=$ $=w(z)+2\Omega'$ mit einem gewissen Ω' mit $\Im\mathfrak{m}\,\Omega'>0$ erfüllt, wobei stets ein zu z konzentrischer infinitesimaler Kreis in eine infinitesimale Ellipse mit dem Achsenverhältnis $p_0(z)$ und einer Richtung der großen Achse, die fest (und zwar für alle z gleich) vorgegeben wird, übergeht. Diese Funktion $w(z)$ sowie den Modul Ω' des Bildtorus kann man nun in vollkommen analoger Weise, wie oben durchgeführt, nach Einführung schiefwinkliger Parallelkoordinaten in der z- und w-Ebene durch FOURIERreihenansatz in der in diese Koordinaten umgeschriebenen Differentialgleichung bestimmen.

5. Es werde noch auf die Möglichkeit hingewiesen, durch einen Ansatz mit FOURIERschen Reihen bzw. Integralen nicht wie oben bei vorausgesetzter Existenz die analytische Gestalt der (7) erfüllenden Abbildung zu bestimmen, sondern umgekehrt die Existenz dieser Abbildung nachzuweisen, indem man die Lösbarkeit des unendlichen linearen Gleichungssystems für die FOURIERkoeffizienten diskutiert. So lassen sich natürlich auch allgemeiner beliebige lineare Differentialgleichungssysteme behandeln, insbesondere z. B. die BELTRAMIsysteme.

6. Gemäß dem bekannten Grenzübergang von FOURIERschen Reihen zu FOURIERschen Integralen läßt sich das aus dem im obigen Rechtecksfall vorliegenden Extremalproblem in der Grenze entstehende und in [9] (Satz 1) geometrisch-funktionentheoretisch gelöste Extremalproblem durch Ansatz mit FOURIERschen Integralen, d.h. durch FOURIERtransformation, auch analytisch-rechnerisch lösen.

7. Auch bei Vorgabe eines beliebigen elliptischen Systems (das also nicht notwendig die Gestalt (7) haben muß, z. B. auch ein Beltramisystem sein kann), lassen sich durch FOURIERtransformation die Lösungen bestimmen, die die Vollebene auf sich abbilden. Gemäß Grenzübergängen der in [9] (S. 5), [10] (§ 5) betrachteten Art lassen sich daraus im Grenzfall hydrodynamisch normierte schlichte konforme Abbildungen eines endlich vielfach zusammenhängenden Gebietes gewinnen, insbesondere auch neuartige Schlichtheitsbedingungen für solche Abbildungen.

8. Es sei abschliessend darauf hingewiesen, daß man die Lösung des Differentialgleichungssystems (7) und damit die Bestimmung der Größe h^* natürlich auch durch die Methoden in [2], [13] oder auch einfach durch ein Differenzenverfahren vornehmen kann.

Literatur

[1] P. P. BELINSKI, Lösung von Extremalproblemen dei Theorie der quasikonformen Abbildungen durch die Variationsmethode. *Sibirsk. Mat. J.* **1** (1960), 303—330 [Russ.].

[2] S. BERGMAN, Integral operators in the theory of linear partial differential equations. Erg.d. Math. u. ihrer Grenzgeb., Neue Folge, Heft 23, *Berlin—Göttingen—Heidelberg*, 1961.

[3] H. GRÖTZSCH, Über die Verzerrung bei schlichten nichtkonformen Abbildungen und über eine damit zusammenhängende Erweiterung des Picardschen Satzes. *Leipz. Ber.* **80** (1928), 503—507.

[4] H. GRÖTZSCH, Über die Verzerrung bei nichtkonformen schlichten Abbildungen mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche. *Leipz. Ber.* **82** (1930), 69—80.

[5] L. W. KANTOROWITSCH und W. I. KRYLOW, Näherungsmethoden der höheren Analysis. *Berlin*, 1956 (Übersetzung aus dem Russ.).

[6] R. KÜHNAU, Über gewisse Extremalprobleme der quasikonformen Abbildung. *Wiss. Z. d. Martin-Luther-Univ. Halle—Wittenberg, Math.-Nat. Reihe* **13** (1964), 35—40.

[7] R. KÜHNAU, Einige Extremalprobleme bei differentialgeometrischen und quasikonformen Abbildungen. *Math. Z.* **94** (1966), 178—192.

[8] R. KÜHNAU, Quasikonforme Abbildungen und Extremalprobleme bei Feldern in inhomogenen Medien. *J. reine angew. Math.* **231** (1968), 101—113.

[9] R. KÜHNAU, Wertannahmeprobleme bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung. *Math. Nachr.* **40** (1969), 1—11.

[10] R. KÜHNAU, Einige Extremalprobleme bei differentialgeometrischen und quasikonformen Abbildungen. II. *Math. Z.* **107** (1968), 307—318.

[11] H. P. KÜNZI, Quasikonforme Abbildungen. Erg. d. Math. u. ihrer Grenzgeb., Neue Folge, Heft 26, *Berlin—Göttingen—Heidelberg*, 1960.

[12] O. TEICHMÜLLER, Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale *Abh. Preuss. Ak. Wiss., Math.-nat. Kl.* 1939, Nr. **22** (1940), 1—197.

[13] I. N. VEKUA, Verallgemeinerte analytische Funktionen. *Berlin*, 1963 (Übers. aus d. Russ.).

[14] L. I. WOLKOWYSKI, Über die konformen Moduln und quasikonforme Abbildungen. Einige Probleme d. Math. u. Mech. *Nowosibirsk*, 1961, S. 65—68. [Russ.].

(Eingegangen am 10. August 1969.)