

DEBRECENI EGYETEM, KÖZGAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR

Gyakorló feladatok az 1. dolgozathoz

- (1) Ábrázolja a koordinátasíkon a

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 2, y - x \leq 3, 4x + 3y \geq 1\}$$

halmazt!

- (2) Határozza meg az

$$f(x, y) = \ln(y - x^2) + \ln((x + 1)^2 - y)$$

függvény értelmezési tartományát (és ábrázolja a kapott halmazt az  $\mathbb{R}^2$  síkban!)

- (3) Számítsa ki a következő függvények első parciális deriváltjait:

(a)  $f(x, y) = (x^2 - 2xy + y^2) \sin(x^2 + y)$ ;

(b)  $f(x, y) = (x^3 - 2x^2y + y^2)^7$ ;

(c)  $f(x, y) = \frac{e^{x^2+y^2}}{x+y}$ .

- (4) Számítsa ki az  $f(x, y) = (x^3 + y^3 + 10)e^{x^2-y^2}$  függvény másodrendű parciális deriváltjait.

- (5) Határozza meg az  $f(x, y) = 2x^2 + y - 1$  függvény iránymenti deriváltját az  $e = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  irány mentén az  $(x_0, y_0) = (2, 1)$  pontban!

- (6) Határozza meg az alábbi függvények stacionárius pontjait és lokális szélsőérték helyeit, azok típusát és nagyságát.

(a)  $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2, \quad (x, y \in \mathbb{R})$ ;

(b)  $f(x, y) = \frac{20}{x} + \frac{50}{y} + xy, \quad (x > 0, y > 0)$ .

- (7) Határozza meg az  $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ , ha  $2x^2 + y^2 + 4z^2 = 9$  függvény feltételes szélsőértékeit!

- (8) Igazolja, hogy

$$b_1 = (1, 1, 0, 1)$$

$$b_2 = (2, 1, 3, 2)$$

$$b_3 = (1, 1, 0, 0)$$

$$b_4 = (0, 1, -1, -1)$$

vektorok bázist alkotnak  $\mathbb{R}^4$ -ben, s adja meg az  $x = (0, 0, 0, 1)$  vektor koordinátáit ebben a bázisban!

- (9) Számítsa ki az  $AB, ABC, ADF, DF, G^2, 3G^2 - 5G$  mátrixokat, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (10) Határozza meg az  $AX, A^T X, X^T A$  mátrixokat, ha

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \text{ és } X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(11) Számítsa ki a következő determinánsok értékét:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 31 & 23 & 55 & 42 \end{vmatrix}.$$

(12) A kifejtési tétel alkalmazásával számítsa ki a következő determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

(13) Írja fel  $x$  polinomjaként az alábbi determinánst:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}.$$

(14) Határozza meg a következő mátrixok inverzét, ha azok léteznek!

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & 11 & -16 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(15) Milyen  $\lambda$  értékek mellett invertálható a

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$$

mátrix?

(16) Határozza meg az  $A \cdot X = B$  egyenlet összes megoldását, ahol  $X$  egy  $3 \times 3$ -as mátrix, és

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ -14 & 8 & -5 \\ 11 & 14 & 3 \end{pmatrix}.$$

(17) Adja meg a következő lineáris egyenletrendszer összes megoldását!

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(18) Számítsa ki az  $a = (0, \sqrt{3}, 0, 1)$ ,  $b = (0, 1, 0, \sqrt{3})$  vektorok összegét, belső szorzatát, normáját és szögét!

Az  $a, b$  vektorok  $0 \leq \varphi \leq \pi$  szögét az  $\langle a, b \rangle = \|a\| \|b\| \cos \varphi$  összefüggés alapján számoljuk ki.

(19) Legyen a  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  lineáris transzformáció mátrixa (a természetes bázisra vonatkozóan)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Határozza meg az  $x = (1, 1, 2)$  vektor képét!

b) Határozza meg azt az  $x$  vektort, melynek képvektora az  $y = (-2, -5, -5)$  vektor!

(20) Határozza meg az

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!

(21) Oldja meg Gauss eliminációval az alábbi lineáris inhomogén egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 &= 12 \end{aligned}$$

(22) Oldjuk meg Cramer szabállyal a következő lineáris egyenletrendszereket:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(23) Oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 14 \end{aligned}$$

(24) Adjuk meg a következő lineáris egyenletrendszer összes megoldását!

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & -7 \\ 3 & -2 & 7 & -5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(25) Tekintsük a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 + \lambda x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= k \end{aligned}$$

a) Legyen  $k = 8$ .  $\lambda$  milyen értékei esetén nincs megoldása az egyenletrendszernek?

b) Most legyen  $\lambda = -2$ . Milyen  $k$  esetén oldható meg az egyenletrendszer?

(26) Határozza meg az

$$x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_1x_2, \quad 9x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 8x_1x_3$$

kvadratikus formák kanonikus alakját és döntse el hogy ezek pozitív, negatív definiték, vagy indefiniték?